พีรพงษ์ พันธ์โสดา,BUU

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์สำหรับการวิเคราะห์สถิติขั้นสูง

การเรียนรู้วิธีวิเคราะห์สถิติขั้นสูงนอกจากจะต้องมีความรู้พื้นฐานด้านสถิติแล้ว การวิเคราะห์สมการทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ด้วยเมทริกซ์ (Matrix) ก็มีความสำคัญอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ข้อมูลหลายตัวแปร (Multivariate Analysis) ในบทนี้จะอธิบายพร้อมแสดงวิธีการแก้สมการด้วยเมทริกซ์ ทั้งการคำนวณด้วยตนเองและใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่เพื่อให้เกิดความเข้าใจรูปแบบเมทริกซ์มากขึ้น ผู้เขียนจะยกข้อมูลการสอบวิชาภาษาไทยและวิชาภาษาอังกฤษ ของนักเรียน 5 คนประกอบการอธิบายดังนี้

Id	**Thai (X)**	**English (Y)**	$(X-\bar{X})$	$(Y-\bar{Y})$	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$	$(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$
1	4	9	1.00	3.2	1.00	10.24	3.2
2	3	7	0.00	1.2	0.00	1.44	0
3	5	7	2.00	1.2	4.00	1.44	2.4
4	2	4	-1.00	-1.8	1.00	3.24	1.8
5	1	2	-2.00	-3.8	4.00	14.44	7.6
$\bar{X}$	3.00	5.8					
S	1.58	2.77	**0.00**	**0.00**	**10.0**	**30.8**	**15**

จากตารางพบว่าผลรวมของคะแนนเบี่ยงเบนจะเป็นศูนย์ ไม่สามารถนำมาวิเคราะห์ต่อได้ จึงต้องยกกำลังสองคะแนนเบี่ยงเบน เพื่อนำผลรวมของคะแนนยกกำลังสอง (Sum of Square : SS) และผลรวมการคูณคะแนนเบี่ยงเบน (Sum of Cross Product : SCP) มาใช้ประกอบการวิเคราะห์เมทริกซ์ทางสถิติ 3 แบบคือ

1. **Matrix SSCP** **(Sum of Square And Sum of Cross Product)**

SS (Thai)

SCP (Thai-English)

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 30.8 \end{bmatrix}$$

SS (English)

2. Matrix Variance – Covariance

Variance (Thai)

Covariance (Thai-English)

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 3.75 \\ 3.75 & 7.7 \end{bmatrix}$$

Variance (English)

เมื่อ

$$\text{Variance (Thai)} = \frac{SS_{(Thai)}}{n-1} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$\text{Variance (English)} = \frac{SS_{(English)}}{n-1} = \frac{30.8}{4} = 7.7$$

$$\text{Covariance (Thai-English)} = \frac{SCP_{(Thai-English)}}{n-1} = \frac{15}{4} = 3.75$$

3. Matrix Correlation

rxx

rxy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.85 \\ 0.85 & 1 \end{bmatrix}$$

ryy

เมื่อ $$r_{xy} = \frac{s_{xy}\,(\text{Covariance})}{s_x s_y (\text{SD})} = \frac{3.75}{\sqrt{2.5}\sqrt{7.7}} = 0.85$$

เมทริกซ์ (Matrix)

รูปแบบของเมทริกซ์

เมทริกซ์ (Matrix) เป็นรูปแบบสัญญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยตัวเลขเป็นสมาชิกทั้งแถวและหลักในเครื่องหมายวงเล็บ ( ) หรือ [ ] เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถว (row) m แถว และจำนวนหลัก (column) n หลัก จะเรียกว่า เมทริกซ์ $m \times n$ เช่นเมทริกซ์ $\mathbf{A} = 2 \times 3$

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}}_{\text{หลักที่ 1,2,3}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} \text{แถวที่ 1,2}$$

เมทริกซ์ที่มีมิติแตกต่างกันทั้งรูปแบบ จำนวนแถว จำนวนหลัก จำนวนสมาชิกและค่าของสมาชิก จะมีชื่อเรียกเฉพาะของแต่ละรูปแบบ ตัวอย่างเช่น

1. เมทริกซ์ที่มีแถวเดียวหรือหลักเดียวจะเรียกว่าเวคเตอร์ (Vector)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเวกเตอร์คอลัมน์มิติ } 3 \times 1$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเวกเตอร์แถวมิติ } 1 \times 3$$

2. เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแนวทแยงจากบนซ้ายลงมาล่างขวาซึ่งเรียกว่าเส้นทแยงหลัก(Principal Diagonal) มีค่าไม่เป็น 0 แต่สมาชิกอื่นนอกแนวทแยงหลักเป็น 0 หมดเรียกว่าเมทริกซ์แนวทแยง (Diagonal Matrix)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

3. เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแนวทแยงหลัก มีค่าเป็น 1 แต่สมาชิกอื่นนอกแนวทแยงหลักเป็น 0 หมดเรียกว่าเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Idenity Matrix)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. เมทริกซ์ที่มีสมาชิกแนวทแยงเป็นตัวเลขเดียวกันแต่ไม่ใช่ 1 ว่าเมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar Matrix)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

การปฏิบัติการกับเมทริกซ์

1. **ทรานโพสของเมทริกซ์ (Transpose of Matrix**) เป็นการสลับแถวและหลักของเมทริกซ์ทำให้เกิดเมทริกซ์ใหม่ เช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ทรานโพสของเมทริกซ์ A

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

2. ดีเทอร์มิแน้นท์ของเมทริกซ์ (Determinant of Matrix) ค่าดีเทอมิแน้นท์เป็นตัวเลขจำนวนหนึ่งที่เกิดจากผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแต่ละแถวคูณกับสมาชิกในแต่ละตัวของแต่ละคอลัมน์ค่าดีเทอมิแน้นท์จะเขียนสัญญลักษณ์เป็นชื่อเมทริกซ์ในเครื่องหมาย | | เช่นค่าดีเทอมิแน้นท์ของเมทริกซ์ A จะเขียนว่า $|A|$ ซึ่งเขียนให้เต็ม ดังนี้

$$|A| = \left|\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}\right|$$

การหาค่าดีเทอร์มิแน้นท์

กรณีเป็นเมทริกซ์ 2×2 ให้คูณสมาชิกที่อยู่ในแนวทแยง ดังนี้

$$|A| = \left|\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\right|$$

คูณขึ้นคูณด้วยเครื่องหมายลบ (-)

$$|A| = \left|\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\right| \quad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

คูณลงคูณด้วยเครื่องหมายบวก (+)

จะได้ $|A| = (3 \times 7) - (2 \times 5)$

$|A| = 11$

กรณีเป็นเมทริกซ์ 3×3 ให้เพิ่มจำนวนหลักอีกสองหลัก โดยยกสมาชิกหลักที่หนึ่งและหลักที่สองมาใส่เป็นหลักที่สี่และหลักที่ห้าแล้วคูณสมาชิกที่อยู่ในแนวทแยง ดังนี้

$$|A| = \left|\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}\right|$$

คูณขึ้นคูณด้วยเครื่องหมายลบ (-)

$$|A| = \left|\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ 7 & 9 & 2 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right| \quad \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

คูณลงคูณด้วยเครื่องหมายบวก (+)

จะได้ $|A| = (4\times9\times7) + (4\times2\times2) + (6\times7\times3) - (2\times9\times6) - (3\times2\times4) - (6\times7\times3)$

$|A| = 252 + 16 + 126 - 108 - 24 - 126$

$|A| = 136$

3. ไมเนอร์ (Minor)

ถ้าตัดสมาชิกในแถวที่ I และคอลัมน์ที่ j ของดีเทอร์มิแน้นท์ออก ค่าดีเทอร์มิแน้นท์ที่เหลือคือ ไมเนอร์ของสมาชิกตัวที่ ij ของดีเทอร์มิแน้นท์แรก

$$|A| \quad = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

ค่าดีเทอร์มิแน้นท์ของสมาชิก A_{12} ซึ่งเป็น 4 มีค่าเป็น m_{12} (ไมเนอร์ของสมาชิกในแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 2 ของ $|A|$)

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

ตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 2 ออก

$$m_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$m_{12} = 49 - 4 = 45$$

4. โคแฟคเตอร์ (Cofactors)

โคแฟคเตอร์ของสมาชิก A_{ij} ได้จาก

$$\boxed{e_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}}$$

สรุปได้ว่าค่าโคแฟคเตอร์เป็นค่าเครื่องหมาย ของไมเนอร์ e_{ij} ซึ่งมีลักษณะดังนี้

☆ ค่าโคแฟคเตอร์เป็น + ถ้า $i + j$ เป็นจำนวนคู่

☆ ค่าโคแฟคเตอร์เป็น - ถ้า $i + j$ เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่าง ค่าโคแฟคเตอร์ของ A_{22} ใน

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

ตัวห้อย 2 + 2 = 4 เป็นเลขคู่จึงคูณด้วย

$(-1)^4$ = 1 (เครื่องหมายบวก)

$$e_{22} = + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

ตัวห้อย

$= 28 - 12$

$= 16$

กรณี โคแฟคเตอร์ของสมาชิก A_{21}

ตัวห้อย 2 + 1 = 3 เป็นเลขคี่จึงคูณด้วย

$(-1)^3$ = - 1 (เครื่องหมายลบ)

$$e_{21} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$= - [\,28 - 18]$

$= - 10$

5. การบวกเมทริกซ์

การบวกเมทริกซ์จะทำได้เมื่อทั้งสองเมทริกซ์มีมิติเท่ากัน โดยการนำสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน (แถวและหลักตรงกัน) มาบวกกัน **กรณีที่มิติไม่เท่ากันไม่สามารถบวกกันได้**

ตัวอย่างการบวกเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 12 & 8 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

6. การคูณเมทริกซ์

6.1 การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนเต็ม เป็นการคูณสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์ด้วยจำนวนเต็มนั้นๆ ตัวอย่างเช่น

กำหนดให้ $Y = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ค่า $3Y$ คือ

$$3Y = \begin{bmatrix} 3 \times 4 & 3 \times 2 \\ 3 \times 3 & 3 \times 6 \end{bmatrix} \qquad 3Y = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$$

6.2 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ เมทริกซ์จะคูณกันได้เมื่อ **หลัก**ของเมทริกซ์ตัวตั้งต้องเท่ากับ **แถว**ของเมทริกซ์ตัวคูณ เมทริกซ์ผลคูณจะมีแถวเท่ากับแถวของเมทริกซ์ตัวตั้ง และมีหลักเท่ากับหลักของเมทริกซ์ตัวคูณ ตัวอย่างเช่น

เมทริกซ์ $\mathbf{A} = 2 \times 3$ $\qquad$ $\mathbf{B} = 3 \times 2$

เท่ากันคูณกันได้

ได้เมทริกซ์ 2×2

ตัวอย่าง เมื่อ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (3 \times 2) + (4 \times 3) + (6 \times 1) \\ (2 \times 2) + (7 \times 3) + (1 \times 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (3 \times 5) + (4 \times 4) + (6 \times 8) \\ (2 \times 5) + (7 \times 4) + (1 \times 8) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 24 & 79 \\ 26 & 46 \end{bmatrix}$$

7. อินเวิอร์สของเมทริกซ์

อินเวิอร์สหรือส่วนกลับของเมทริกซ์ใดๆ โดยให้นิยามว่าถ้านำอินเวิอร์สของเมทริกซ์ไปคูณกับเมทริกซ์เดิม จะได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ เช่น

A = เมทริกซ์ใดๆ

A^{-1} = อินเวิอร์สของเมทริกซ์

$A\ A^{-1} = I$ หรือ $A^{-1}A = I$

ตัวอย่างการหาอินเวิอร์สของเมทริกซ์จัตุรัส

กรณีเป็นเมทริกซ์ 2×2 จงหา $\mathbf{A^{-1}}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

ลำดับขั้นการหาอินเวอร์ส

1. หาค่าดีเทอร์มิแน้นท์ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$

$$|\mathrm{Det\ A}| = \left|\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right|$$

$$= 2 - 12$$

$$= -10$$

2. หา Adjoint ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$

2.1 หาไมเนอร์และโคแฟคเตอร์จะได้

$$m = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 เมื่อได้ไมเนอร์และโคแฟคเตอร์แล้วให้ทรานโพส m จะได้ Adjoint ของเมทริกซ์ **A**

$$\text{Adjoint } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. หา $\mathbf{A}^{-1}$ โดยการหาร Adjoint **A** ด้วยค่าดีเทอร์มิแนนท์

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{-10} & \frac{-4}{-10} \\ \frac{-3}{-10} & \frac{1}{-10} \end{bmatrix}$$

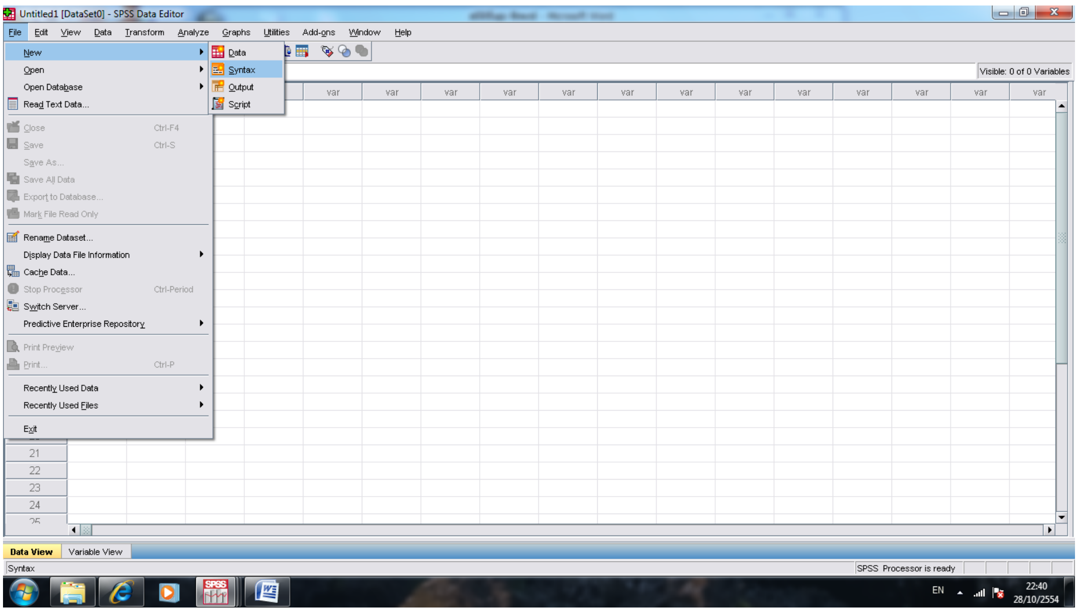
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix}$$

4. ตรวจความถูกต้อง ตามนิยาม $\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ จะได้

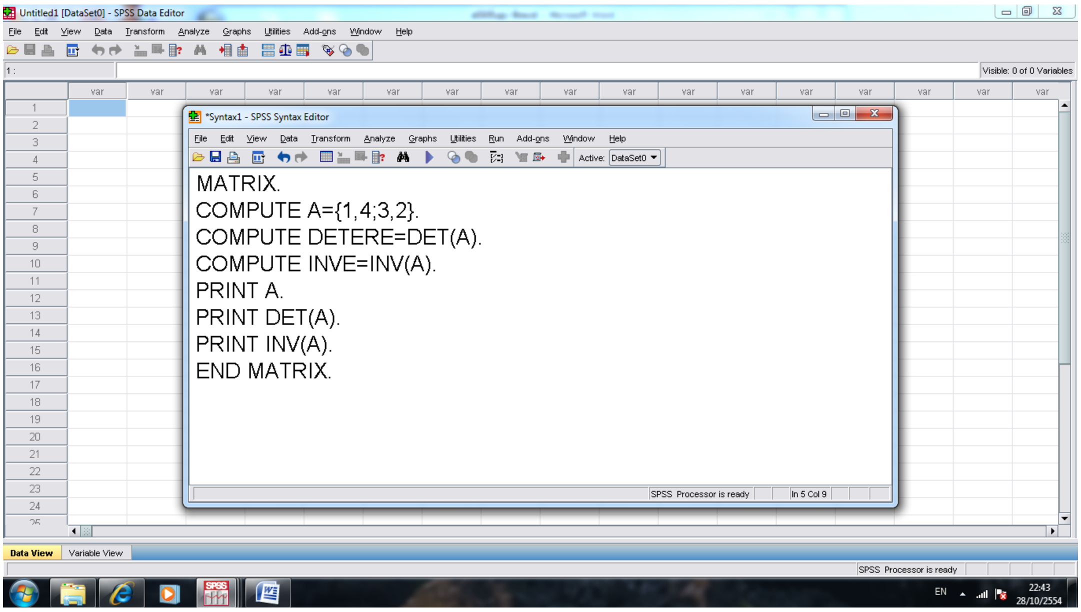
$$\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การหาอินเวิอร์สของเมทริกซ์ด้วยโปรแกรม SPSS

1. เปิดโปรแกรม SPSS แล้วไปที่หน้าต่าง File - New –Syntax



2. เขียน Syntax



3. Run All จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

```
Run MATRIX procedure:

A
        1    4
        3    2

DET(A)
        -10

INV(A)

     -0.2    0.4
      0.3   -0.1

------ END MATRIX -----
```

การแก้สมการด้วย Matrix

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า X และ Y จากสมการ

$$2X + Y = 5$$
$$X - Y = 1$$

1. เขียนสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. จาก $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ เมื่อต้องการหา B จะได้ $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathrm{A}$
3. หาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ **A**

$$|\mathrm{Det\ A}| = \left|\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right|$$
$$= -2 - 1$$
$$= -3$$

4. หา Adjoint ของเมทริกซ์ **A** (ต้องหาไมเนอร์และโคแฟคเตอร์ในแต่ละตำแหน่ง (m_A) ก่อน)

$$m_A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$m_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$m_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$m_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

แทนค่า ใน

$$m_A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^t$$

ทรานโพส m_A จะได้

$$\text{Adjoint } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. หา $\mathbf{A}^{-1}$ โดยการหาร Adjoint **A** ด้วยค่าดีเทอร์มิแน้นท์

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{-3} & \frac{-1}{-3} \\ \frac{-1}{-3} & \frac{2}{-3} \end{bmatrix}$$

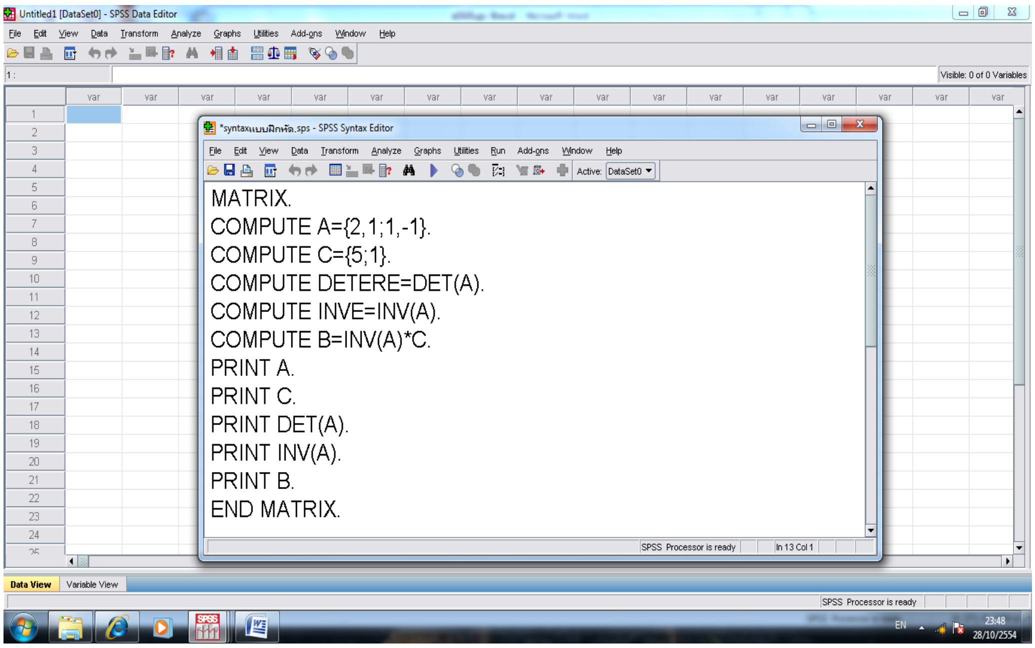
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.33 \\ 0.33 & -0.66 \end{bmatrix}$$

6. หาค่า B จาก $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathrm{A}$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.33 \\ 0.33 & -0.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. จากการคำนวณจะได้ผลลัพธ์ **X = 2 , Y = 1**

8. ใช้โปรแกรม **SPSS** เขียน **Syntax** ตรวจสอบ



9. Run All จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

```
Run MATRIX procedure:

A
        2  1
        1 -1

C
          5
          1

DET(A)

         -3

INV(A)

 .3333333333   .3333333333
 .3333333333  -.6666666667

B
    2.000000000
    1.000000000


------ END MATRIX -----
```

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า X , Y , Z จากสมการ $\mathbf{Y - X + 2Z = 5}$

$$\mathbf{X - Y + 7Z = 4}$$

$$\mathbf{3Y - Z + 2X = 6}$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\mathbf{-X + Y + 2Z = 5}$$

$$\mathbf{X - Y + 7Z = 4}$$

$$\mathbf{2X + 3Y - Z + = 6}$$

1. เขียนสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์

$$\mathbf{U} \quad \times \quad \mathbf{V} \; = \; \mathbf{W}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. จาก $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \mathbf{W}$ เมื่อต้องการหา V จะได้ $\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1}\mathrm{W}$

3. หาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ U

$$|\mathrm{Det\ U}| = \left|\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right|$$

$$= -1 + 14 + 6 + 4 + 21 + 1$$

$$= 45$$

4. หา Adjoint ของเมทริกซ์ U (ต้องหาไมเนอร์และโคแฟคเตอร์ในแต่ละตำแหน่ง $(\mathrm{m_u})$ ก่อน)

$$\mathrm{m_u} = \begin{bmatrix} \mathrm{m}_{11} & \mathrm{m}_{12} & \mathrm{m}_{13} \\ \mathrm{m}_{21} & \mathrm{m}_{22} & \mathrm{m}_{23} \\ \mathrm{m}_{31} & \mathrm{m}_{32} & \mathrm{m}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{m}_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = +\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -20$$

$$\mathrm{m}_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 15$$

$$\mathrm{m}_{13} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = +\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 5$$

$$\mathrm{m}_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 7$$

$$\mathrm{m}_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = +\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$m_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 5$$

$$m_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = +\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = 9$$

$$m_{32} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = 9$$

$$m_{33} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = +\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

แทนค่าใน m_u

$$m_u = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$m_u = \begin{bmatrix} -20 & 15 & 5 \\ 7 & -3 & 5 \\ 9 & 9 & 0 \end{bmatrix}^t$$

ทรานโพส m_u จะได้

$$\text{Adjoint } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -20 & 7 & 9 \\ 15 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

5. หา $\mathbf{U}^{-1}$ โดยการหาร Adjoint **U** ด้วยค่าดีเทอร์มิแนนท์

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -20/45 & 7/45 & 9/45 \\ 15/45 & -3/45 & 9/45 \\ 5/45 & 5/45 & 0/45 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U^{-1}} = \begin{bmatrix} -0.44 & 0.16 & 0.2 \\ 0.33 & -0.07 & 0.2 \\ 0.11 & 0.11 & 0 \end{bmatrix}$$

6. หาค่า V จาก $\mathbf{V} = \mathbf{U^{-1}}\mathrm{W}$

$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} -0.44 & 0.16 & 0.2 \\ 0.33 & -0.07 & 0.2 \\ 0.11 & 0.11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$V_{11} = -0.22 + 0.64 + 1.2 = -0.36$$

$$V_{21} = 1.65 - 0.28 + 1.2 = 2.57$$

$$V_{31} = 0.55 + 0.44 + 0 = 0.99$$

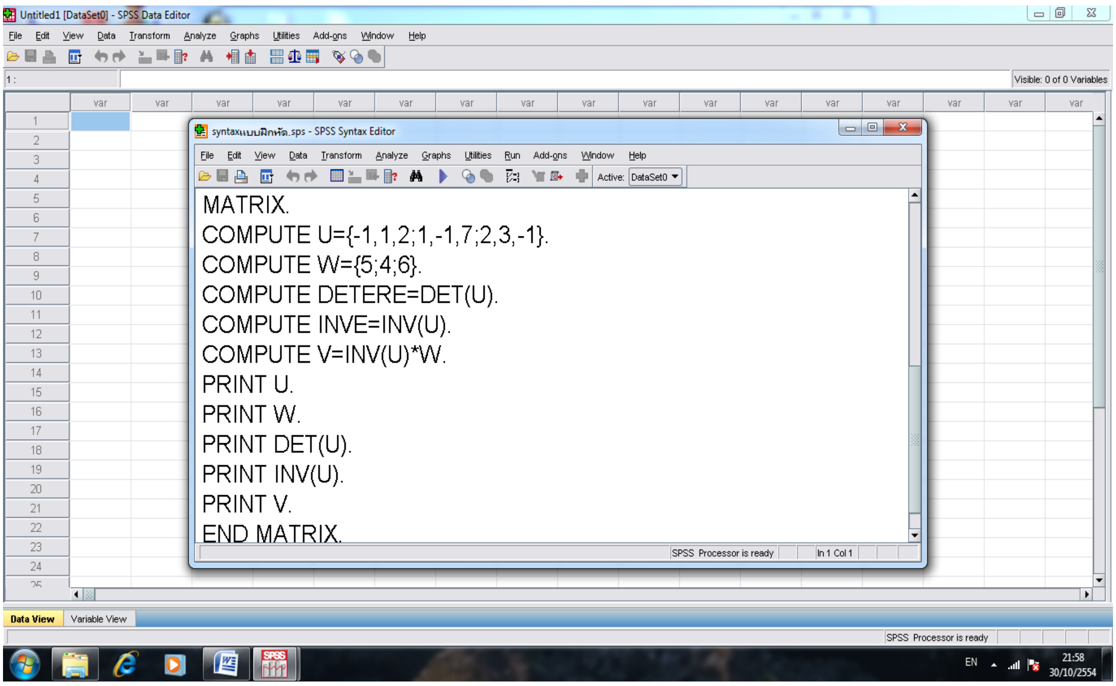
$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} -0.36 \\ 2.57 \\ 0.99 \end{bmatrix}$$

7. จากการคำนวณจะได้ผลลัพธ์ $\mathbf{X} = -0.36$

$\mathbf{Y} = 2.57$

$\mathrm{Z} = 0.99$

8. ใช้โปรแกรม **SPSS** เขียน **Syntax** ตรวจสอบ



9. Run All จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

```
Run MATRIX procedure:

U
     -1   1   2
      1  -1   7
      2   3  -1
W
            5
            4
            6

DET(U)
           45

INV(U)

-.4444444444   .1555555556   .2000000000
 .3333333333  -.0666666667   .2000000000
 .1111111111   .1111111111   .0000000000

V
  -.400000000
  2.600000000
  1.000000000

------ END MATRIX -----
```

จากตัวอย่างจะพบว่าการคำนวณกับการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะได้ผลลัพธ์ไม่เท่ากันแต่ก็ใกล้เคียงกันเนื่องจากมีการปัดทศนิยม ในที่นี้นำเสนอเป็นหลักการเพื่อความเข้าใจเท่านั้น ส่วนการใช้งานจริงมีการคำนวณที่ซับซ้อนควรใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณ