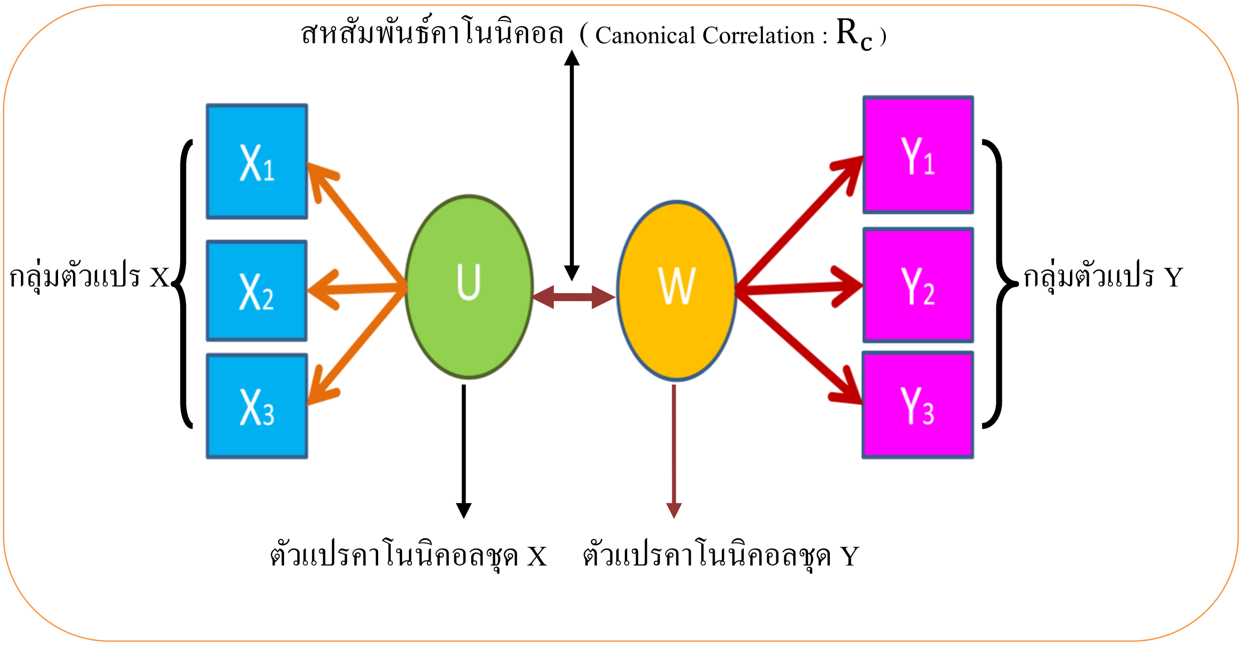
พีรพงษ์ พันธ์โสดา, BUU

การวิเคราะห์สหสัมพันธ์คาโนนิคอล (Canonical Correlation)

สหสัมพันธ์คาโนนิคอลเป็นการหาค่าสหสัมพันธ์ของตัวแปร 2 ชุด โดยการสร้างตัวแปรคาโนนิคอลเป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้นของตัวแปรเดิมในแต่ละกลุ่ม แล้วคำนวณหาค่าสหสัมพันธ์อย่างง่าย ระหว่างตัวแปรคาโนนิคอล และเรียกค่าสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรคาโนนิคอลนั้นว่าสหสัมพันธ์คาโนนิคอล (Canonical Correlation)



ค่าน้ำหนักความสำคัญคาโนนิคอล หรือสัมประสิทธ์คาโนนิคอล (Cannonical Welghts, Fucntion Coefficient) หมายถึงค่าตัวเลขหรือน้ำหนักของตัวแปรเดิมชุด X หรือตัวแปรเดิมชุด Y ที่รวมตัวด้วยน้ำหนักที่เหมาะสมทำให้เกิดตัวแปรคาโนนิคอล ในที่นี้จะกำหนดชื่อเป็น U และ W การตีความเหมือน β ในการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณ ซึ่งเป็นค่าที่แสดงว่าตัวแปร X หรือตัวแปร Y มีความสำคัญในการอธิบายตัวแปรคาโนนิคอลเท่าใด เพื่อควบคุมตัวแปรอื่นๆ ในชุดตัวแปร จากตัวอย่างจะได้

$$U = \alpha_1 Z_{x1} + \alpha_2 Z_{x2} + \alpha_3 Z_{x3}$$

$$W = \beta_1 Z_{y1} + \beta_2 Z_{y2} + \beta_3 Z_{y3}$$

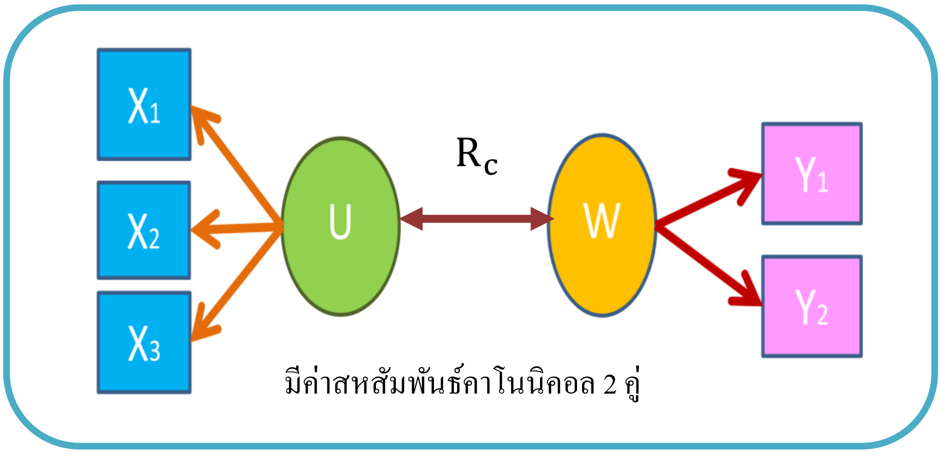
เมื่อ U และ W คือตัวแปรคาโนนิคอลชุด X และชุด Y

α และ β คือน้ำหนักของตัวแปรชุดเดิมที่รวมกันเป็นตัวแปรคาโนนิคอล

Z_x และ Z_y ตัวแปรเดิมชุด X และ ตัวแปรเดิมชุด Y ในรูปคะแนนมาตรฐาน

จำนวนตัวแปรและค่าสหสัมพันธ์คาโนนิคอล

ชุดตัวแปรเดิม (X และ Y) จะทำให้เกิดตัวแปรคาโนนิคอลได้หลายตัว นั่นคือ U และ W จะเกิดขึ้นได้หลายคู่ คู่แรกจะมีค่าสหสัมพันธ์สูงสุด คู่ลำดับถัดไปจะมีค่าสหสัมพันธ์น้อยลงไปเรื่อยๆ จำนวนค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จะมีเท่ากับจำนวนที่น้อยกว่า ระหว่างชุดตัวแปรต้นกับชุดตัวแปรตาม เช่น ชุดตัวแปรต้นมี 3 ด้าน ตัวแปรตามมี 2 ด้าน จะเกิดค่าสหสัมพันธ์คาโนนิคอล 2 คู่



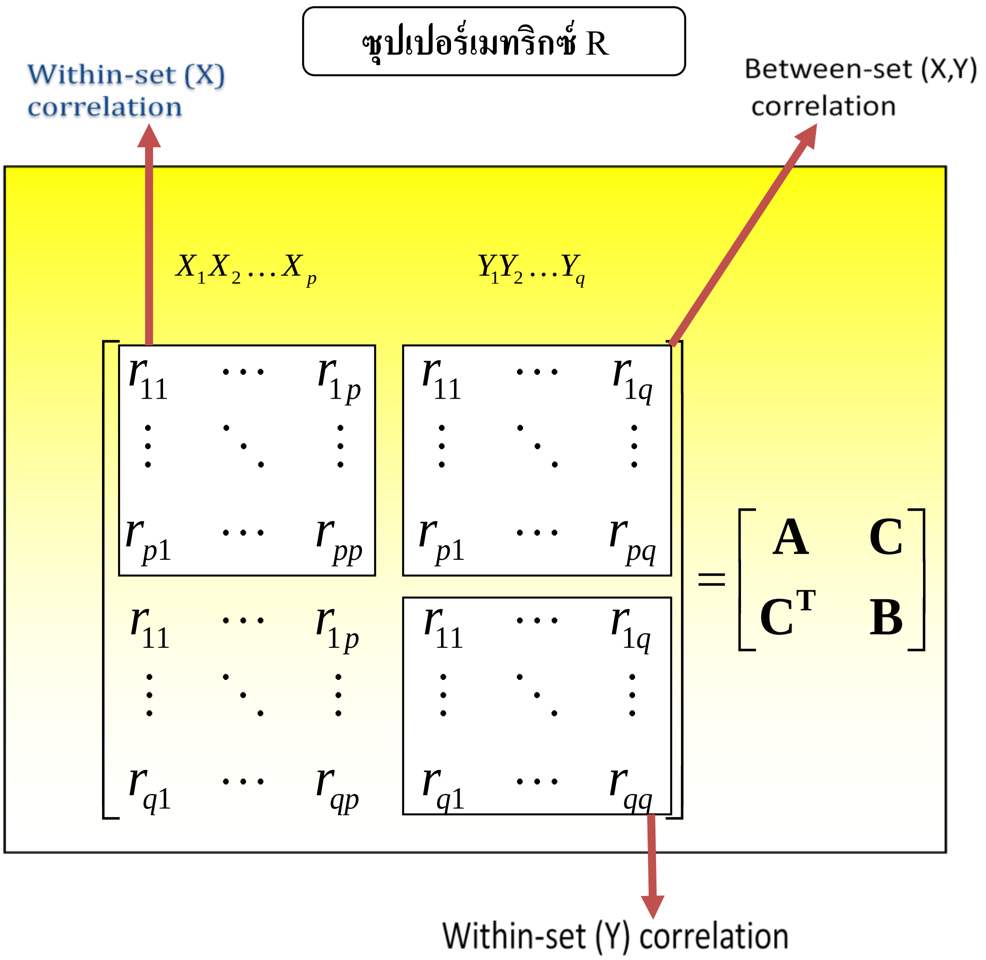
จุดมุ่งหมายของการวิเคราะห์สหสัมพันธ์คาโนนิคอล

1. ตัวแปรคาโนนิคอล (Canonical Variates) ที่เกิดจากกลุ่มตัวแปรเดิม (X,Y) สัมพันธ์กันกี่มิติ แต่ละมิติของแต่ละชุด เกิดจากการผสมตัวแปรเดิมด้วยน้ำหนักเป็นเท่าใด
2. ตัวแปรคาโนนิคอล ในแต่ละชุดมีค่าสหสัมพันธ์ (Canonical Correlation) เป็นเท่าใดมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่
3. สามารถคำนวณค่าคะแนนตัวแปรคาโนนิคอล (Canonical Variates Score) ที่สนใจเพื่อนำไปวิเคราะห์ในฐานะตัวแปรใหม่หรือตอบวัตถุประสงค์การวิจัยใหม่
4. หาสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเดิมกับตัวแปรคาโนนิคอลในชุด (Canonical Loadings) หรือหาสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในแต่ละชุดข้ามไปยังตัวแปรคาโนนิคอล ที่สร้างจากตัวแปรเดิมอีกชุด (Cross Loadings)
5. ใช้ค่าสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเดิมกับตัวแปรคาโนนิคอลในชุด(Canonical Loadings) และสัมประสิทธิ์คาโนนิคอลในรูปคะแนนมาตรฐาน (Standardized Coefficient) ตีความหมายตัวแปรคาโนนิคอลว่าแต่ละตัวต้องการมุ่งวัดลักษณะอะไร
6. หาค่า Redundancy ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ที่แสดงให้เห็นถึงสัดส่วนปริมาณความแปรปรวนของตัวแปรเดิมในแต่ละชุดซึ่งอธิบายได้ด้วยตัวแปรคาโนนิคอล (Canonical Variates) แต่ละตัว

รูปแบบพื้นฐานการวิเคราะห์สหสัมพันธ์คาโนนิคอล

จากการรวบรวมข้อมูลที่เป็นค่าของตัวแปร ต่างๆทั้งตัวแปรอิสระซึ่งมี p ตัว และตัวแปรตาม ซึ่งมี q ตัว ค่าเหล่านั้นเป็นค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด n คน เรียกว่าข้อมูลเบื้องต้น นำข้อมูลเบื้องต้นดังกล่าวมาจัดให้อยู่เมตริกซ์แล้วสร้างเป็นเมทริกซ์ขนาดใหญ่ (Supermatrix) ซึ่งมีสมาชิกเป็นเมทริกซ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 4 เมทริกซ์ย่อย ดังนี้

กลุ่ม ตัวอย่าง	ตัวแปร X	ตัวแปร Y
1	X_{11}.......X_{12}.......X_{1p}	Y_{11}......Y_{12}......Y_{1q}
2	X_{21}.......X_{22}.......X_{2p}	Y_{21}......Y_{22}......Y_{2q}
.	.	.
.	.	.
n	X_{n1}.......X_{n2}.......X_{np}	Y_{n1}......Y_{n2}......Y_{nq}



ตัวอย่างการวิเคราะห์สหสัมพันธ์คาโนนิคอล

ผู้วิจัยต้องการศึกษารูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนไหวร่างกายส่วนบนกับการเคลื่อนไหวร่างกายส่วนล่างในการเต้นบัลเล่ย์ โดยเก็บข้อมูลจากนักเต้นจำนวน 8 คน ได้ข้อมูลดังตาราง จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์คาโนนิคอล และทดสอบนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ที่ได้ (ที่มาของข้อมูล Tabachnick, B.G.& Fidell, L.S. (2007) .pp 572-573)

ID	TS	TC	BS	BC
1	1.0	1.0	1.0	1.0
2	7.0	1.0	7.0	1.0
3	4.6	5.6	7.0	7.0
4	1.0	6.6	1.0	5.9
5	7.0	4.9	7.0	2.9
6	7.0	7.0	6.4	3.8
7	7.0	1.0	7.0	1.0
8	7.0	1.0	2.4	1.0

จากตารางจะพบว่า $p = q = 2$ กรณีนี้ไม่มีกลุ่มตัวแปรมากหรือน้อย (มีด้านละ 2 ตัวแปร)แสดงว่าค่าสหสัมพันธ์คาโนนิคอล $(\mathbf{R_c})$ จะมี 2 ค่า จากนั้นให้คำนวณตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1. คำนวณค่าสหสัมพันธ์อย่างง่ายของเปียร์สันระหว่างตัวแปร จะได้ดังนี้

	TS	TC	BS	BC
TS	1.000	-.161	.758	-.341
TC	-.161	1.000	.110	.857
BS	.758	.110	1.000	.051
BC	-.341	.857	.051	1.000

ขั้นที่ 2. คำนวณค่าไอเก็น (Eigenvalues) จากเมทริกซ์ **R**

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{bmatrix}$$

จากผลการคำนวณค่าสหสัมพันธ์จะได้

$R_{xx} = \begin{bmatrix} 1.000 & -.161 \\ -.161 & 1.000 \end{bmatrix}$ $R_{xy} = \begin{bmatrix} .758 & -.341 \\ .110 & .857 \end{bmatrix}$

$R_{yx} = \begin{bmatrix} .758 & .110 \\ -.341 & .857 \end{bmatrix}$ $R_{yy} = \begin{bmatrix} 1.000 & .051 \\ .051 & 1.000 \end{bmatrix}$

คำนวณค่าไอเก็นจากสมการ

$$\left[R_{yy}^{-1} R_{yx} R_{xx}^{-1} R_{xy} - \lambda I\right] = 0$$

จากสมการจึงต้องคำนวณหาค่า R_{yy}^{-1} และ R_{xx}^{-1}

2.1 หา $\mathbf{R_{yy}^{-1}}$

$$R_{yy} = \begin{bmatrix} 1.000 & .051 \\ .051 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Det R_{yy} = .997

Adjoint $R_{yy} = \begin{bmatrix} 1.000 & -.051 \\ -.051 & 1.000 \end{bmatrix}$

$$R_{yy}^{-1} = \frac{1}{.997} \begin{bmatrix} 1.000 & -.051 \\ -.051 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$R_{yy}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.002607783 & -.051132997 \\ -.051132997 & 1.002607783 \end{bmatrix}$$

2.2 หา $\mathbf{R_{xx}^{-1}}$

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} 1.000 & -.161 \\ -.161 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Det R_{xx} = .974

Adjoint $R_{xx} = \begin{bmatrix} 1.000 & .161 \\ .161 & 1.000 \end{bmatrix}$

$$R_{xx}^{-1} = \frac{1}{.974}\begin{bmatrix} 1.000 & .161 \\ .161 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$R_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.026610778 & .165284335 \\ .165284335 & 1.026610778 \end{bmatrix}$$

2.3 หา $\mathbf{R_{yy}^{-1}} * \mathbf{R_{yx}}$

$$\begin{bmatrix} 1.002607783 & -.051132997 \\ -.051132997 & 1.002607783 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .758 & .110 \\ -.341 & .857 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .7774130513 & .0664658777 \\ -.3806480656 & .8536102402 \end{bmatrix}$$

2.4 หา $\mathbf{R_{xx}^{-1}} * \mathbf{R_{xy}}$

$$\begin{bmatrix} 1.026610778 & .165284335 \\ .165284335 & 1.026610778 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .758 & -.341 \\ .110 & .857 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .7963522466 & -.2084256000 \\ .2382127117 & .8234434784 \end{bmatrix}$$

2.5 หา $\mathbf{R_{yy}^{-1}R_{yx}R_{xx}^{-1}R_{xy}}$

$$\begin{bmatrix} .7774130513 & .0664658777 \\ -.3806480656 & .8536102402 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .7963522466 & -.2084256000 \\ .2382127117 & .8234434784 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .6349276469 & -.1073018881 \\ -.0997891322 & .7822365869 \end{bmatrix}$$

2.6 **หาค่าไอเก้น (λ)**

$$\left|\begin{bmatrix} .6349276469 & -.1073018881 \\ -.0997891322 & .7822365869 \end{bmatrix} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} .6349276469 - \boldsymbol{\lambda} & -.1073018881 \\ -.0997891322 & .7822365869 - \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

$$(.6349276469 - \boldsymbol{\lambda})(.7822365869 - \boldsymbol{\lambda}) - (-.0997891322)(-.1073018881)$$

$$0.496664 - 0.63492764 69\boldsymbol{\lambda} - 0.7822365869\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^2 - 0.010708$$

$$\boldsymbol{\lambda}^2 - 1.41716\,\boldsymbol{\lambda} + 0.486 = 0$$

แก้สมการควอเดรติก นี้ด้วย

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เมื่อ b = -1.41716 , c = 0.486 และ a = 1

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \frac{-(-1.41716) + \sqrt{(-1.41716)^2 - 4*1*0.486}}{2*1}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2 = \frac{-(-1.41716) - \sqrt{(-1.41716)^2 - 4*1*0.486}}{2*1}$$

จะได้ค่าไอเก้นดังนี้

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = .83566$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2 = .58152$$

ถ้านำค่าไอเก้นทั้งสองมารวมกัน .83566 +.58152 = 1.417 ซึ่งจะเท่ากับค่า Trace (ผลรวมของสมาชิกในแนวทแยงหลัก) ของเมทริกซ์ที่ใช้หาค่าไอเก้น

$$\left|\begin{bmatrix} .6349276469 & -.1073018881 \\ -.0997891322 & .7822365869 \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{I}\right| = 0$$

Trace ของเมทริกซ์คือ $.6349276469 + .7822365869 = 1.417$

เท่ากับผลรวมของค่าไอเก้น

ขั้นที่ 3 คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์คาโนนิคอล (Canonical Correration : R_c)

เนื่องจาก $\lambda = R_c^2$

$$R_{c1} = \sqrt{\lambda_1}$$
$$R_{c2} = \sqrt{\lambda_2}$$

$$R_{c1} = \sqrt{.83566} = 0.91414$$

$$R_{c1} = \sqrt{.58152} = 0.76257$$

ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์คาโนนิคอล มีสัดส่วนการอธิบายความแปรปรวน 2 คู่ (ตามจำนวนค่า λ หรือค่า R_c^2) คู่แรกสามารถอธิบายความแปรปรวนได้ร้อยละ 83.57 และคู่ที่สองสามารถอธิบายความแปรปรวนได้ร้อยละ 58.15 ซึ่งจะได้ทดสอบทางสถิติต่อไป

ขั้นที่ 4 ทดสอบนัยสำคัญทางสถิติของค่า R_c เป็นการทดสอบนัยสำคัญของค่าไอเก้นเพราะค่าสหสัมพันธ์คาโนนิคอลหามาจากค่าไอเก้น $R_c = \sqrt{\lambda_1}$ โดยต้องการทดสอบว่าค่าไอเก้นทั้งหมดมีค่าเป็น 0 หรือไม่ โดยมีขั้นตอน ดังนี้

4.1 ตั้งสมมติฐานทดสอบไอเก้นตัวที่ 1 ถึง p

H_0 : $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots = \lambda_p = 0$

H_1 : H_0 ไม่จริง

4.2 คำนวณค่าวิลค์แลมด้าตัวที่ 1 จากสูตร

$$\wedge = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \ldots.(1 - \lambda_p)$$

= (1 - .83566) (1 - .58152)

= .0688

4.3 คำนวณค่า χ^2 จากวิลค์แลมด้าตัวที่ 1

$$\chi^2 = -\left[(n-1) - \frac{1}{2}(p+q+1)\right] \ln \wedge$$

$$\chi^2 = -\left[(8-1) - \frac{1}{2}(2+2+1)\right] \ln .0688$$

$= 12.02$

4.4 ตัดสินผลการทดสอบเปรียบเทียบค่า χ^2 ที่คำนวณได้กับค่า χ^2 จาก ตาราง df เป็น pq ($2\times2 = 4$) ที่ระดับ $\alpha = .05$ จะได้ค่าวิกฤต 9.49 จึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือค่าสหสัมพันธ์คาโนนิคอลของตัวแปรคาโนนิคอลคู่ที่ 1 มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4.5 คำนวณค่าวิลค์แลมด้าตัวที่ 2 (ตัดค่าไอเก้นชุดที่ 1 ออก) จากสูตร

$$\wedge = (1 - \boldsymbol{\lambda}_2)$$

$= (1 - .58152)$

$= .4185$

4.6 คำนวณค่า χ^2 จากวิลค์แลมด้าตัวที่ 2

$$\chi^2 = -\left[(n-1) - \frac{1}{2}(p+q+1)\right] \ln \wedge$$

$$\chi^2 = -\left[(8-1) - \frac{1}{2}(2+2+1)\right] \ln .4185$$

$= 3.92$

4.7 ตัดสินผลการทดสอบเปรียบเทียบค่า χ^2 ที่คำนวณได้กับค่า χ^2 จาก ตาราง df เป็น $(p-1)(q-1) = 1$ ที่ระดับ $\alpha = .05$ จะได้ค่าวิกฤต 3.84 จึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือค่าสหสัมพันธ์คาโนนิคอลของตัวแปรคาโนนิคอลคู่ที่ 2 มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ขั้นที่ 5 หาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์คาโนนิคอลของชุดตัวแปรต้นและตัวแปรตาม

5.1 หาค่าน้ำหนักด้านตัวแปรตาม จากสมการ

$$\left[R_{yy}^{-1} R_{yx} R_{xx}^{-1} R_{xy} - \lambda I\right]\beta = 0$$

จะได้เมทริกซ์ $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} .6349276469 & -.1073018881 \\ -.0997891322 & .7822365869 \end{bmatrix}$

หาเวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta}_1$ จาก $\boldsymbol{\lambda}_1$

$$|\mathbf{R}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}| = \begin{bmatrix} .6349276469-.83566 & -.1073018881 \\ -.0997891322 & .7822365869-.83566 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -.20073 & -.10730 \\ -.099789 & -.05342 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cofactor } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -.05342 & .099789 \\ .10730 & -.20073 \end{bmatrix}$$

หาค่า β_1 ของ Cofactor $\mathbf{R}$ จากสมการ

$$\beta = \frac{V}{\sqrt{\theta}}$$

เมื่อ V = [First row of Cofactor Matrix]′

θ = [First row of Cofactor Matrix] $[R_{yy}]$ [First row of Cofactor Matrix]′

$$\theta = [-.05342 \quad .099789]\begin{bmatrix} 1 & .051 \\ .051 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -.05342 \\ .099789 \end{bmatrix} = .01227$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} -.05342 \\ .099789 \end{bmatrix} / \sqrt{.01227} = \begin{bmatrix} -.48 \\ .90 \end{bmatrix}$$

หาเวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta}_2$ จาก $\boldsymbol{\lambda}_2$

$$|\mathbf{R}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}| = \begin{bmatrix} .6349276469-.58152 & -.1073018881 \\ -.0997891322 & .7822365869-.58152 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} .053408 & -.10730 \\ -.099789 & .20072 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cofactor } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} .20072 & .099789 \\ .10730 & .053408 \end{bmatrix}$$

$$\theta = [.20072 \quad .099789]\begin{bmatrix} 1 & .051 \\ .051 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .20072 \\ .099789 \end{bmatrix} = .05229$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} .20072 \\ .099789 \end{bmatrix} / \sqrt{.05229} = \begin{bmatrix} .88 \\ .44 \end{bmatrix}$$

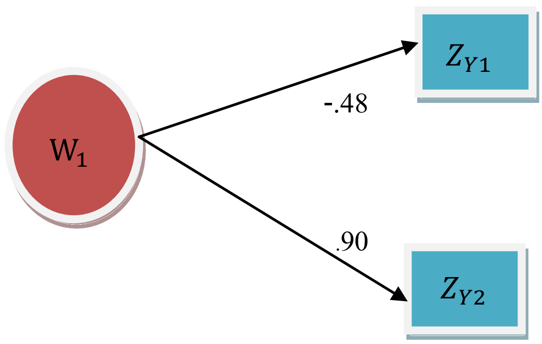
รวมสมาชิกของเวกเตอร์ β_1 และ β_2 จะได้เมทริกซ์น้ำหนักในตัวแปรตาม

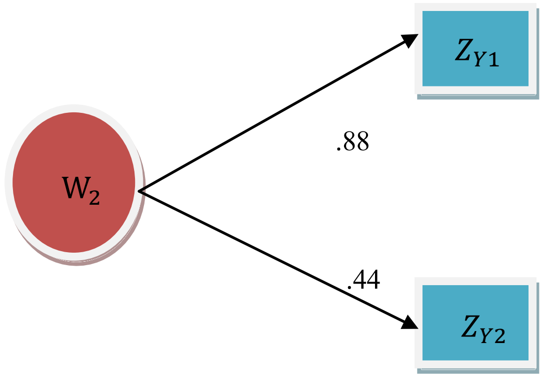
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -.48 & .88 \\ .90 & .44 \end{bmatrix}$$

แสดงว่าตัวแปรคาโนนิคอลที่ได้จากตัวแปรตาม 2 ชุด มีสมการดังนี้

$$\boxed{\begin{aligned} W_1 &= -.48Z_{Y1} + .90Z_{Y2} \\ W_2 &= .88Z_{Y1} + .44Z_{Y2} \end{aligned}}$$

สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้





5.2 หาค่าน้ำหนักด้านตัวแปรต้น จากสมการ

$$\mathbf{A} = R_{xx}^{-1} R'_{yx} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1/2}$$

เมื่อ $\quad \mathbf{D}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \end{bmatrix}$

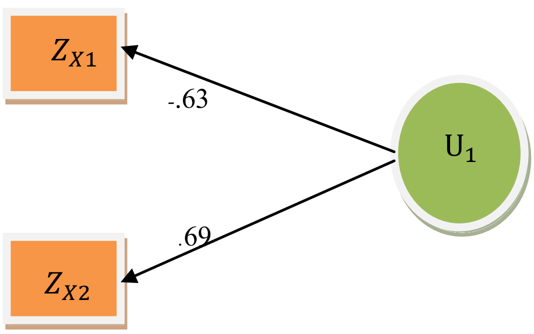
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.026610778 & .165284335 \\ .165284335 & 1.026610778 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .758 & -.341 \\ .110 & .857 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.48 & .88 \\ .90 & .44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{.83566}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{.58152}} \end{bmatrix}$$

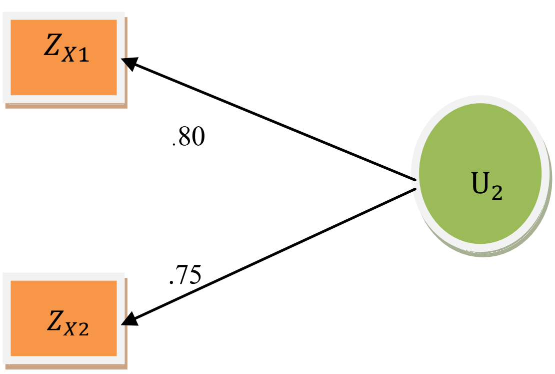
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -.63 & .80 \\ .69 & .75 \end{bmatrix}$$

แสดงว่าตัวแปรคาโนนิคอลที่ได้จากตัวแปรต้น 2 ชุด มีสมการดังนี้

$$\begin{aligned} U_1 &= -.63Z_{X1} + .69Z_{X2} \\ U_2 &= .80Z_{X1} + .75Z_{X2} \end{aligned}$$

สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้





ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรคาโนนิคอลกับตัวแปรเดิม

(Structure Coefficients) หรือน้ำหนักตัวประกอบ (Canonical loadings)

เป็นค่าน้ำหนักตัวประกอบหรือค่าน้ำหนักตัวแปรเดิม ที่รวมตัวกันเป็นตัวแปรคาโนนิคอลโดยจะมีค่าสหสัมพันธ์ไม่เกิน 1 และไม่น้อยกว่า -1 ผลการวิเคราะห์ค่าน้ำหนักตัวประกอบจะสามารถช่วยให้ การเปรียบเทียบการมีส่วนร่วมของตัวแปรเดิม ที่รวมตัวเป็นตัวแปรคาโนนิคอลได้ง่ายขึ้น ส่งผลให้การ ตีความหมายเพื่อตั้งชื่อตัวแปรคาโนนิคอล สะท้อนความหมายของโครงสร้างเดิมเด่นชัดยิ่งขึ้น การหาค่า Canonical loadings หาได้จากสมการเมทิกซ์ ดังนี้

$$\boxed{S_X = R_{XX}\,\mathbf{A}}$$

$$\boxed{S_Y = R_{YY}\,\mathbf{B}}$$

เมื่อ S_X คือเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X กับตัวแปรคาโนนิคอลชุด X โดยที่คอลัมน์คือจำนวนชุดตัวแปรคาโนนิคอล แถวคือจำนวนตัวแปรต้น p ตัว

S_Y คือเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร Y กับตัวแปรคาโนนิคอลชุด Y โดยที่คอลัมน์คือจำนวนชุดตัวแปรคาโนนิคอล แถวคือจำนวนตัวแปรตาม q ตัว

R_{XX} คือค่าเมทริกซ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นด้วยกัน

R_{YY} คือค่าเมทริกซ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามด้วยกัน

$\mathbf{A}$ คือเมทริกซ์น้ำหนักตัวแปรคาโนนิคอลชุดตัวแปรต้น

$\mathbf{B}$ คือเมทริกซ์น้ำหนักตัวแปรคาโนนิคอลชุดตัวแปรตาม

การหาค่า S_X และ S_Y

$$S_X = \begin{bmatrix} 1.000 & -.161 \\ -.161 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.63 & .80 \\ .69 & .75 \end{bmatrix}$$

$$S_X = \begin{bmatrix} -.74 & .68 \\ .79 & .62 \end{bmatrix}$$

$$S_Y = \begin{bmatrix} 1.000 & .051 \\ .051 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.48 & .88 \\ .90 & .44 \end{bmatrix}$$

$$S_Y = \begin{bmatrix} -.44 & .90 \\ .88 & .48 \end{bmatrix}$$

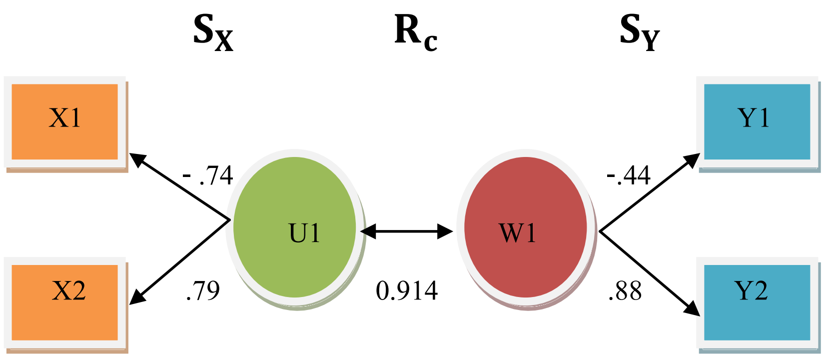
จะได้ค่า Canonical loadings

$$S_X = \begin{bmatrix} -.74 & .68 \\ .79 & .62 \end{bmatrix}$$

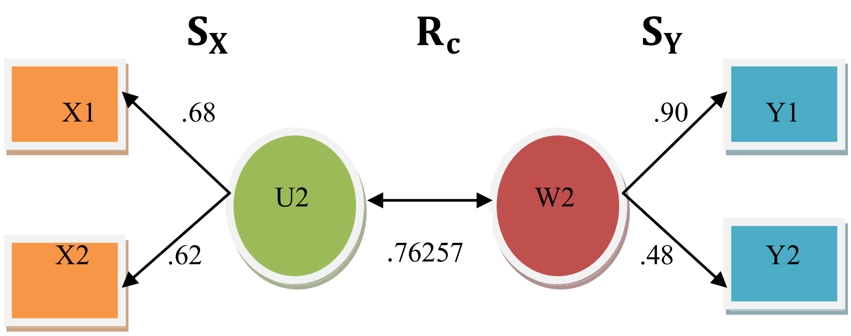
$$S_Y = \begin{bmatrix} -.44 & .90 \\ .88 & .48 \end{bmatrix}$$

สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

ตัวแปรคาโนนิคอล ชุดที่ 1



ตัวแปรคาโนนิคอล ชุดที่ 2



การวิเคราะห์สัดส่วนของความแปรปรวน (Redundancy Analysis)

คือการวิเคราะห์สัดส่วนของความแปรปรวนในตัวแปรเดิมที่อธิบายตัวแปรคาโนนิคอล โดยแสดงค่าเป็นตัวเลขหรือร้อยละ เพื่อให้เห็นความแปรปรวนของชุดตัวแปรเดิมในการวัดร่วมกันในแต่ละมิติหรือข้ามมิติ ดังนี้

1. สัดส่วนของความแปรปรวนในตัวแปรเดิมที่อธิบายตัวแปรคาโนนิคอลภายในมิติเดียวกัน

หาได้จากค่าเฉลี่ยกำลังสองของ Canonical loadings ตัวอย่างเช่น

$$\text{ด้านตัวแปรต้น} \qquad S_X = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{มิติที่ 1} & \text{มิติที่ 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -.74 & .68 \\ .79 & .62 \end{bmatrix} \end{array}$$

จากตัวอย่างในกลุ่มตัวแปรต้นมีตัวแปร 2 ตัวแปร มิติที่ 1(ตัวแปรคาโนนิคอลตัวที่ 1) สามารถอธิบายแทนตัวแปรทั้งหมดได้คิดเป็นสัดส่วน $(-.74^2 + .79^2)/2$ = .58 แสดงว่าตัวแปรต้นทั้งสองตัววัดร่วมกันในมิติที่ 1 อยู่ร้อยละ 58 และอีกร้อยละ 42 เป็นสัดส่วนที่ตัวแปรต้นทั้งสองตัววัดร่วมกันในมิติที่ 2 (ตัวแปรคาโนนิคอลตัวที่ 2) ซึ่งหาได้จาก $(.68^2 + .62^2)/2$ = .42

$$\text{ด้านตัวแปรตาม} \qquad S_Y = \begin{bmatrix} -.44 & .90 \\ .88 & .48 \end{bmatrix}$$

ในกลุ่มตัวแปรตามมีตัวแปร 2 ตัวแปร มิติที่ 1(ตัวแปรคาโนนิคอลตัวที่ 1) สามารถอธิบายแทนตัวแปรทั้งหมดได้คิดเป็นสัดส่วน $(-.44^2 + .88^2)/2$ = .48 แสดงว่าตัวแปรต้นทั้งสองตัววัดร่วมกันในมิติที่ 1 อยู่ร้อยละ 48 และอีกร้อยละ 52 เป็นสัดส่วนที่ตัวแปรตามทั้งสองตัววัดร่วมกันในมิติที่ 2 (ตัวแปรคาโนนิคอลตัวที่ 2) ซึ่งหาได้จาก $(.90^2 + .48^2)/2$ = .52

2. **สัดส่วนของความแปรปรวนในตัวแปรเดิมที่อธิบายด้วยตัวแปรคาโนนิคอลข้ามมิติ**

หาได้จากค่าเฉลี่ยกำลังสองของ Canonical Cross loadings หรือจากสมการ

$$\boxed{r_d = (pv)(R_c^2)}$$

เมื่อ r_d คือสัดส่วนของความแปรปรวนในตัวแปรเดิมที่อธิบายด้วยตัวแปรคาโนนิคอลข้ามมิติ

pv คือสัดส่วนของความแปรปรวนในตัวแปรเดิมที่อธิบายตัวแปรคาโนนิคอลมิติเดียวกัน

R_c^2 คือค่ายกกำลังสองของสหสัมพันธ์คาโนนิคอลหรือค่าไอเก้น ($\boldsymbol{\lambda}$)ในมิตินั้นๆ

จากตัวอย่างสามารถคำนวณหาค่า rd ได้ดังนี้

$$\mathrm{rd}_{x1\rightarrow y} = \left[\frac{(-.44)^2 + (.88)^2}{2}\right](.84) = .40$$

$$\mathrm{rd}_{x2\rightarrow y} = \left[\frac{(.90)^2 + (.48)^2}{2}\right](.58) = .30$$

แสดงว่าความแปรปรวนในตัวแปรตาม อธิบายได้ด้วยตัวแปรคาโนนิคอลที่ผลิตด้วยตัวแปรต้น มิติที่ 1 ร้อยละ 40 มิติที่ 2 ร้อยละ 30

$$\mathrm{rd}_{y1\rightarrow x} = \left[\frac{(-.74)^2 + (.79)^2}{2}\right](.84) = .48$$

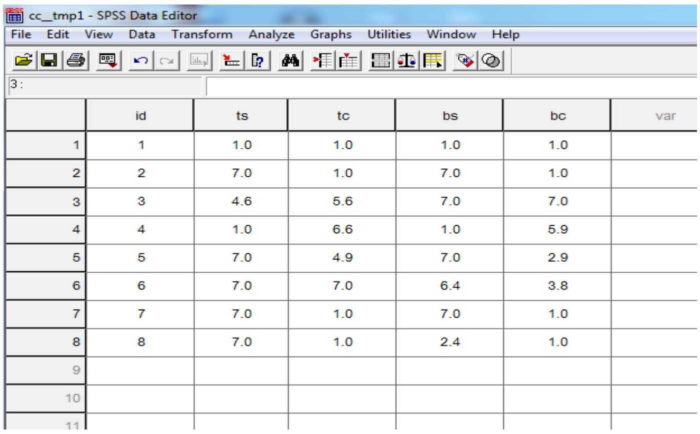
$$\mathrm{rd}_{y2\rightarrow x} = \left[\frac{(.68)^2 + (.62)^2}{2}\right](.58) = .24$$

แสดงว่าความแปรปรวนในตัวแปรต้น อธิบายได้ด้วยตัวแปรคาโนนิคอลที่ผลิตด้วยตัวแปรตาม มิติที่ 1 ร้อยละ 48 มิติที่ 2 ร้อยละ 24

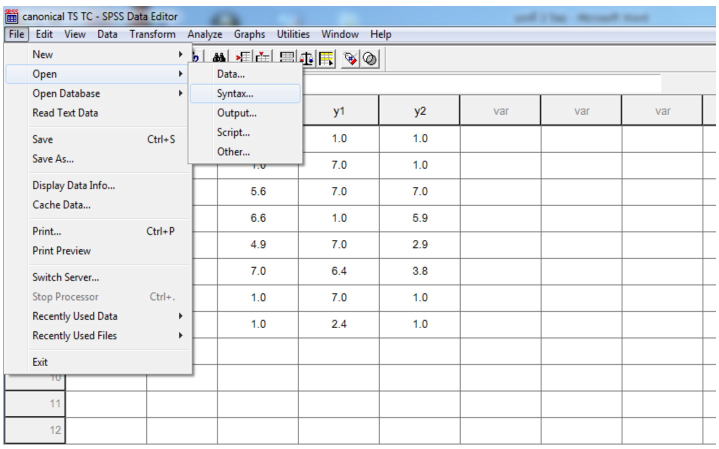
การวิเคราะห์สหสัมพันธ์คาโนนิคอลด้วยโปรแกรม SPSS

การวิเคราะห์สหสัมพันธ์คาโนนิคอลโดยวิธีคำนวณด้วยเมทริกซ์ดังที่แสดงมาข้างต้น จะพบว่ามีความยุ่งยากพอสมควร หากเป็นการวิเคราะห์ข้อมูลในงานวิจัยคงไม่สามารถใช้วิธีนี้ได้ ในโปรแกรม SPSS ก็ไม่มีเมนูสำหรับการวิเคราะห์สหสัมพันธ์คาโนนิคอลเป็นการเฉพาะ ในที่นี้จะนำเสนอการวิเคราะห์โดยการใช้ไฟล์มาโครที่ชื่อว่า Canonical Correlation.sps ซึ่งไฟล์มาโครนี้จะเป็นชุดคำสั่งที่เขียนในรูป Systax จะมีมาพร้อมกับโปรแกรม SPSS เวอร์ชั่น 10 ในโฟลเดอร์ Program Files ดังนั้นก่อนที่จะทำการวิเคราะห์ต้องทำการ Save ไฟล์มาโครมาไว้ในโฟลเดอร์เดียวกันกับไฟล์ข้อมูลก่อน การวิเคราะห์มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 เปิดไฟล์ข้อมูล



ขั้นที่ 2 เปิด Syntax ไฟล์มาโคร Canonical Correlation.sps



ขั้นที่ 3 พิมพ์คำสั่ง INCLUDE ตามด้วยแหล่งที่เก็บไฟล์มาโคร

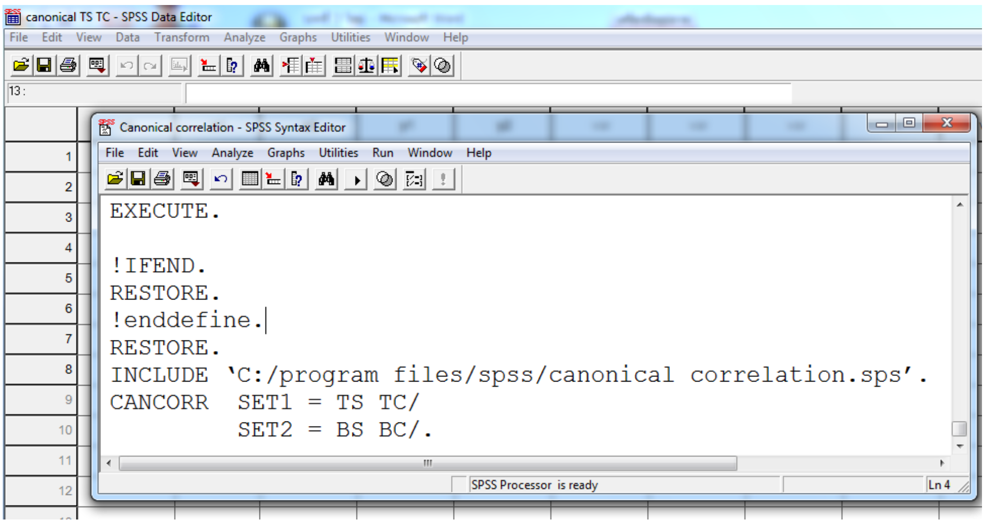
INCLUDE 'C:/program files/spss/canonical correlation.sps'. และคำสั่ง

CANCORR ตามด้วยชื่อตัวแปรที่ต้องการวิเคราะห์

CANCORR SET1 = TS TC/

SET2 = BS BC/.

(พิมพ์ต่อคำสั่งท้ายสุดของไฟล์มาโคร ดังภาพ)



ขั้นที่ 4 Run all โปรแกรมจะแสดงผลดังนี้

Run MATRIX procedure:

Correlations for Set-1

	TS	TC
TS	1.0000	-.1611
TC	-.1611	1.0000

แสดงค่าสหสัมพันธ์อย่างง่าย
ของตัวแปรต้น (Set 1)

Correlations for Set-2

	BS	BC
BS	1.0000	.0511
BC	.0511	1.0000

แสดงค่าสหสัมพันธ์อย่างง่าย
ของตัวแปรตาม (Set 2)

Correlations Between Set-1 and Set-2

	BS	BC
TS	.7580	-.3408
TC	.1096	.8570

แสดงค่าสหสัมพันธ์อย่างง่าย ระหว่าง Set 1 และSet 2

Canonical Correlations

1	.914
2	.762

แสดงค่าสหสัมพันธ์คาโนนิคอล

Test that remaining correlations are zero:

	Wilk's	Chi-SQ	DF	Sig.
1	.069	12.045	4.000	.017
2	.419	3.918	1.000	.048

ผลการทดสอบนัยสำคัญทางสถิติ สหสัมพันธ์คาโนนิคอล

Standardized Canonical Coefficients for Set-1

	1	2
TS	-.625	.797
TC	.686	.746

สัมประสิทธิ์คาโนนิคอลชุดตัวแปร Set 1ในรูปคะแนนมาตรฐาน

Raw Canonical Coefficients for Set-1

	1	2
TS	-.230	.293
TC	.249	.270

สัมประสิทธิ์คาโนนิคอลชุดตัวแปร Set 1 ในรูปคะแนนดิบ

Standardized Canonical Coefficients for Set-2

	1	2
BS	-.482	.878
BC	.901	.437

สัมประสิทธิ์คาโนนิคอลชุดตัวแปร Set 2 ในรูปคะแนนมาตรฐาน

Raw Canonical Coefficients for Set-2

	1	2
BS	-.170	.309
BC	.372	.180

สัมประสิทธิ์คาโนนิคอลชุดตัวแปร Set 2 ในรูปคะแนนดิบ

Canonical Loadings for Set-1

	1	2
TS	-.736	.677
TC	.787	.617

สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร คาโนนิคอล Set 1 กับตัวแปรเดิม

Cross Loadings for Set-1

	1	2
TS	-.673	.516
TC	.719	.471

สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเดิมใน Set 1 ข้ามไปสัมพันธ์กับตัวแปรคาโนนิคอลที่เกิดจากตัวแปรเดิม Set 2

Canonical Loadings for Set-2

	1	2
BS	-.436	.900
BC	.876	.482

สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร คาโนนิคอล Set 2 กับตัวแปรเดิม

Cross Loadings for Set-2

	1	2
BS	-.399	.686
BC	.801	.367

สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเดิมใน Set 2 ข้ามไปสัมพันธ์กับตัวแปรคาโนนิคอลที่เกิดจากตัวแปรเดิม Set 1

Redundancy Analysis:

Proportion of Variance of Set-1 Explained by Its Own Can. Var.

	Prop Var
CV1-1	.580
CV1-2	.420

สัดส่วนความแปรปรวนในตัวแปรเดิม Set 1 ที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรคาโนนิคอล Set 1

Proportion of Variance of Set-1 Explained by Opposite Can.Var.

	Prop Var
CV2-1	.485
CV2-2	.244

สัดส่วนความแปรปรวนในตัวแปรเดิม Set 1 ที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรคาโนนิคอล Set 2

Proportion of Variance of Set-2 Explained by Its Own Can. Var.

	Prop Var
CV2-1	.479
CV2-2	.521

สัดส่วนความแปรปรวนในตัวแปรเดิม Set 2 ที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรคาโนนิคอล Set 2

Proportion of Variance of Set-2 Explained by Opposite Can. Var.

Prop Var

CV1-1	.400	สัดส่วนความแปรปรวนในตัวแปรเดิม Set 2 ที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรคาโนนิคอล Set 1
CV1-2	.303	

------ END MATRIX -----